Ein Satz aus der Theorie der dreiaxigen Coordinatensysteme.

Von Dr. phil. *Dedekind* zu Göttingen.

(Besonders abgedruckt aus *Crelle's* „Journal für die reine u. angewandte Mathematik, Bd. 50.")

Wenn die Winkel YOZ, ZOX, XOY eines dreiaxigen Coordinatensystems durch a, b, c bezeichnet werden, so wird der convexe Winkel w zwischen zwei beliebigen Richtungen OM und OM' durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(1.)\quad \left.\begin{array}{l}\alpha\alpha'\sin a^2+\beta\beta'\sin b^2+\gamma\gamma'\sin c^2+(\beta\gamma'+\gamma\beta')(\cos b\cos c-\cos a)\\+(\gamma\alpha'+\alpha\gamma')(\cos c\cos a-\cos b)+(\alpha\beta'+\beta\alpha')(\cos a\cos b-\cos c)\end{array}\right\}=D\cos w,$$

in welcher α, β, γ die Cosinus der concaven Winkel MOX, MOY, MOZ, eben so α', β', γ' die Cosinus der concaven Winkel $M'OX$, $M'OY$, $M'OZ$ sind, und D folgende Bedeutung hat:

$$(2.)\qquad D = 1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c.$$

Dieser bekannte Satz schliefst den andern ein, dafs drei solche Richtungs-Cosinus, wie α, β, γ, stets der Bedingung

$$(3.)\quad \left.\begin{array}{l}\alpha\alpha\sin a^2+\beta\beta\sin b^2+\gamma\gamma\sin c^2+2\beta\gamma(\cos b\cos c-\cos a)\\+2\gamma\alpha(\cos c\cos a-\cos b)+2\alpha\beta(\cos a\cos b-\cos c)\end{array}\right\}=D$$

Genüge leisten müssen.

Ist das Coordinatensystem rechtwinklig, so gehen die Gleichungen (1.) und (3.) in die beiden folgenden über:

$$\begin{aligned}\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' &= \cos w,\\ \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma &= 1.\end{aligned}$$

Um daher auszudrücken, dafs dann die drei Linien OM, OM', OM'' ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem bilden, sind folgende sechs Gleichungen *nöthig:*

$$(4.)\quad \left\{\begin{array}{ll}\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=1; & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0;\\ \alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma'=1; & \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0;\\ \alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma''=1; & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0.\end{array}\right.$$

Sie sind auch ***hinreichend*** zu diesem Zweck, ***wenn angenommen wird, dafs das erste System rechtwinklig sei.***

Der in der Überschrift angekündigte Satz besteht nun darin, dafs diese letztere Beschränkung *weggelassen* werden darf, indem die Gleichungen (4.) unzweifelhaft ausdrücken, ***dafs beide Systeme durchaus rechtwinklig sein müssen.*** Der Beweis dieses merkwürdigen Theorems bildet den Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes.

Zunächst mögen hier ohne weitern Beweis die bekannten Folgerungen aus den Gleichungen (4.) Platz finden; nämlich:

$$(5.)\quad \begin{cases} \alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha''=1; & \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0; \\ \beta\beta+\beta'\beta'+\beta''\beta''=1; & \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0; \\ \gamma\gamma+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma''=1; & \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0; \end{cases}$$

und

$$(6.)\quad \begin{cases} \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\varepsilon\alpha; & \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'=\varepsilon\beta; & \alpha'\beta''-\alpha''\beta'=\varepsilon\gamma; \\ \beta''\gamma-\beta\gamma''=\varepsilon\alpha'; & \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\varepsilon\beta'; & \alpha''\beta-\alpha\beta''=\varepsilon\gamma'; \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma=\varepsilon\alpha''; & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=\varepsilon\beta''; & \alpha\beta'-\alpha'\beta=\varepsilon\gamma''; \end{cases}$$

wo bekanntlich $\varepsilon\varepsilon=1$ ist.

Die ternäre quadratische Form

$$F \equiv xx+yy+zz+2yz\cos a+2zx\cos b+2xy\cos c,$$

(welche bekanntlich das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punctes (xyz) von dem Nullpuncte O des Coordinatensystems $OXYZ$ ausdrückt) hat zur ***Determinante*** den oben (2.) mit D bezeichneten Ausdruck (das Quadrat des Volumens des von den drei Axen $OX=OY=OZ=1$ als Kanten gebildeten Parallelepipedums), und zur ***adjungirten*** Form:

$$\begin{aligned} F_1 \equiv\; & xx\sin a^2+yy\sin b^2+zz\sin c^2+2yz(\cos b\cos c-\cos a) \\ & +2zx(\cos c\cos a-\cos b)+2xy(\cos a\cos b-\cos c). \end{aligned}$$

Es ist dann bekanntlich die Determinante von F_1 das Quadrat der von F, also $=DD$, und die adjungirte Form F_2 von F_1 ist $\equiv DF$.

Wenn man folgende Bezeichnung einführt:

$$\left\{\begin{aligned} & xx'\sin a^2+yy'\sin b^2+zz'\sin c^2+(yz'+zy')(\cos b\cos c-\cos a) \\ & +(zx'+xz')(\cos c\cos a-\cos b)+(xy'+yx')(\cos a\cos b-\cos c) \end{aligned}\right\}$$

$$\equiv F_1\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix},$$

so ist aus der Theorie der ternären Formen weiter bekannt, dafs

$$F_1\begin{pmatrix}x, & y, & z\\ x, & y, & z\end{pmatrix}F_1\begin{pmatrix}x', & y', & z'\\ x', & y', & z'\end{pmatrix}-\left[F_1\begin{pmatrix}x, & y, & z\\ x', & y', & z'\end{pmatrix}\right]^2$$

$$\equiv F_2\begin{pmatrix}yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx'\\ yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx'\end{pmatrix},$$

also im gegenwärtigen Falle

$$(7.)\qquad \equiv D.F\begin{pmatrix}yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx'\\ yz'-zy', & zx'-xz', & xy'-yx'\end{pmatrix}$$

ist.

Nach diesen Vorbemerkungen ist es nun leicht, den obigen Satz zu beweisen. $OXYZ$ sei das eine Coordinatensystem mit den Winkeln a, b, c; $OMM'M''$ das andere mit den Winkeln m, m', m''. OM bilde mit den drei Axen OX, OY, OZ Winkel, deren Cosinus α, β, γ u. s. w. sind. Dann finden folgende sechs Gleichungen Statt:

$$(8.)\begin{cases}F_1\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha, & \beta, & \gamma\end{pmatrix}=D; \quad F_1\begin{pmatrix}\alpha', & \beta', & \gamma'\\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix}=D; \quad F_1\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta'', & \gamma''\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma''\end{pmatrix}=D;\\ F_1\begin{pmatrix}\alpha', & \beta', & \gamma'\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma''\end{pmatrix}=D\cos m; \quad F_1\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta'', & \gamma''\\ \alpha, & \beta, & \gamma\end{pmatrix}=D\cos m';\\ \qquad\qquad F_1\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix}=D\cos m'',\end{cases}$$

welche allgemein die Beziehung zwischen irgend zwei dreiaxigen Coordinatensystemen ausdrücken. Wenn nun aber aufserdem die Gleichungen (4.), und folglich auch die (5. und 6.) gelten, so erhält man durch Addition der drei ersten Gleichungen in (8.):

$$(9.)\qquad \sin a^2+\sin b^2+\sin c^2 = 3D.$$

Ferner ergiebt sich aus dem in (7.) enthaltenen Theorem:

$$F_1\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha, & \beta, & \gamma\end{pmatrix}F_1\begin{pmatrix}\alpha', & \beta', & \gamma'\\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix}-\left[F_1\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha', & \beta', & \gamma'\end{pmatrix}\right]^2$$

$$\equiv D.F\begin{pmatrix}\beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta\\ \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & \alpha\beta'-\alpha'\beta\end{pmatrix}=D.F\begin{pmatrix}\varepsilon\alpha'', & \varepsilon\beta'', & \varepsilon\gamma''\\ \varepsilon\alpha'', & \varepsilon\beta'', & \varepsilon\gamma''\end{pmatrix}$$

oder

$$DD-DD\cos m''^2$$

$$= D(\alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma''+2\beta''\gamma''\cos a+2\gamma''\alpha''\cos b+2\alpha''\beta''\cos c),$$

also

$$D \sin m^2 = 1 + 2\beta\gamma \cos a + 2\gamma\alpha \cos b + 2\alpha\beta \cos c;$$
$$D \sin m'^2 = 1 + 2\beta'\gamma' \cos a + 2\gamma'\alpha' \cos b + 2\alpha'\beta' \cos c;$$
$$D \sin m''^2 = 1 + 2\beta''\gamma'' \cos a + 2\gamma''\alpha'' \cos b + 2\alpha''\beta'' \cos c;$$

und hieraus durch Addition:

$$D(\sin m + \sin m'^2 + \sin m''^2) = 3.$$

Vergleicht man diese Relation mit der in (9.) enthaltenen, so ergiebt sich

$$(\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2)(\sin m^2 + \sin m'^2 + \sin m''^2) = 3.3,$$

und hieraus

$$\sin a^2 = \sin b^2 = \sin c^2 = \sin m^2 = \sin m'^2 = \sin m''^2 = 1;$$

d. h. alle sechs Coordinatenwinkel müssen *rechte* Winkel sein.

Bei diesem Beweise wurde natürlich vorausgesetzt, dafs D von Null verschieden sei, d. h. dafs OX, OY, OZ nicht in einer Ebene enthalten sind.

Göttingen, 15. Juli 1854.